TEMA 2: PROPORCIONALIDAD

1. MAGNITUDES DIRECTA E INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Definición. Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

La razón o cociente entre la segunda y la primera magnitud, se llama **constante de proporcionalidad directa**.

Definición. Se dice que dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Al producto de las dos magnitudes, se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Una forma de resolver actividades de magnitudes proporcionales es mediante una regla de tres. Sin embargo, este procedimiento se convierte en un método que se realiza de forma completamente mecánica, sin que se sepa realmente lo que se está haciendo.

Pero también podemos resolver estas actividades utilizando otro procedimiento que podríamos llamar de reducción a la unidad, en el que calcularemos el valor de la segunda magnitud que corresponde al valor 1 de la primera magnitud. Este valor que calculamos es lo que hemos llamado antes constante de proporcionalidad.

Regla de tres directa

Ejemplo: Hemos hecho el recorrido de 560 kilómetros con el coche en 8 horas. Cuántos kilómetros recorreremos en 12 horas.

Si en 8 horas (A) ------> 560 km (B)
en 12 horas (C) ------> x (D)

x = (560 x 12) : 8 = 6720 : 8 = 840 kilómetros.

En general, la regla de tres con magnitudes directamente proporcionales se resuelve multiplicando los términos medios (B y C) y dividiendo por el extremo A.

Regla de tres inversa.

En las cantidades inversamente proporcionales al aumentar una, disminuye la otra. Ejemplo: La velocidad de un automóvil y el tiempo que tarda en recorrer una distancia. A más velocidad, menos tiempo tardará.

Veamos este ejemplo: 12 albañiles construyen una casa en 60 días. ¿Cuánto tardarán 2 albañiles en construirla? (con menos albañiles tardarán más tiempo, luego es inversa).

Si 12 albañiles (A) tardan 60 días (B)
2 albañiles (B) tardarán x (D)

Un solo albañil tardará (12 x 60) = 720 días. Dos albañiles, la mitad 720 : 2 = 360 días.
Con la regla de tres multiplicamos las dos primeras cantidades A y B y dividimos por la C.

D = (A x B) : C

En general, la regla de tres con magnitudes inversamente proporcionales se resuelve multiplicando los dos primeros términos (A y B) y dividiendo por el tercero (C).

ACTIVIDADES

1. ¿Cuánto cuestan 8 kilos de manzanas si 11 kilos cuestan 14,30 euros?
2. Se ha pagado 255 euros por la compra de 3 calculadoras. ¿Cuánto valen 7 calculadoras? ¿Y 30? ¿Y 23?
3. Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?
4. Una tubería tiene una fuga de agua y pierde 322 litros de agua cada 7 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 2300 litros?
5. Se dispone de 420 litros de agua almacenados en 7 depósitos iguales. ¿Cuántos litros de agua contendrán 13 depósitos iguales a los anteriores?
6. Una máquina envasa 1200 latas de refresco en una jornada de 8 horas. ¿Cuántas latas de refresco envasará en un día que trabaje 5 horas?
7. A cierta hora del día un palo de 1,5 m. de largo proyecta una sombra de 60 cm. ¿Cuánto mide un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 2,40 m.?
8. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son directamente proporcionales:

   Magnitud 1: 24 8 40 222 5,6 0,9

   Magnitud 2: 60 30 75 82,5 0,25
9. Nueve personas realizan un trabajo en 16 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 8 personas?
10. Un grifo echa 20 litros de agua por minuto y tarda en llenar un depósito una hora y 30 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito un grifo que eche 30 litros de agua por minuto?
11. Un tren circulando a 120 km/h ha tardado 6 horas en hacer un recorrido ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo recorrido un tren que circula a una velocidad de 90 km/h?
12. Ocho amigos aportan 15 euros cada uno para la compra de un regalo a otro. ¿Cuánto dinero tendrán que poner si se añaden ocho amigos más?
13. Cuatro personas tardan 40 días en pintar la pared exterior de un campo de fútbol, ¿cuántos días tardarán 5 personas en hacer el mismo trabajo?
14. Un rectángulo tiene 25 centímetros de base y 18 centímetros de altura. ¿Qué altura deberá tener un rectángulo de 15 centímetros de base para que tenga la misma superficie?
15. Completar la tabla sabiendo que las dos magnitudes son inversamente proporcionales:

   Magnitud 1 15 40 180 400 600 0,5

   Magnitud 2 24 60 120 0,4 0,01

2. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA.

Hay situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes, que vamos a tratar en este apartado con el nombre de proporcionalidad compuesta. Vamos a resolver ejercicios en los que se relacionan tres magnitudes. La forma de hacerlos será relacionar la primera con la tercera y dejar la segunda fija, igual que si se tratara de un ejercicio de los dos apartados anteriores. Después, dejando la primera fija, relacionaremos la segunda y la tercera.

a) Un crucero por el Mediterráneo para 200 personas durante 15 días necesita, para gastos de alojamiento y comida, 54.000 €. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días?

G = Gastos	P = Nº de personas	D = Nº de días
54000 €	200 personas	15 días
x €	250 personas	10 días

9.000.000 —— 15 —— 200

x —— 10 —— 250

$$\frac{x}{9.000.000} = \frac{10}{15} \cdot \frac{250}{200}$$

b) Si18 máquinas mueven 1200 m^3 de tierra en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 máquinas para mover 1600 m^3 de tierra?

Con un mismo nº de máquinas, para mover doble o triple cantidad de tierra, se necesitarán el doble o el triple número de días, respectivamente. Por lo tanto la relación de proporcionalidad es directa.

Para una misma cantidad de m^3 de tierra, doble o triple cantidad de máquinas tardarán la mitad o la tercera parte, respectivamente. Por tanto, esta relación de proporcionalidad es inversa.

18 máquinas —— 1200 m^3 —— 12 días

24 máquinas —— 1600 m^3 —— x días

$$\frac{x}{12} = \frac{1.600}{1.200} \cdot \frac{18}{24}$$

y despejando, x = 12.

Actividades:

1. En un mes, un equipo de 22 hombres ha realizado una calle de 16 m.¿Cuántos metros realizarán 15 hombres en 22 días?
2. Una guarnición de 1.800 hombres tiene víveres para tres meses con raciones de 800 gr/día. ¿Cuál debería ser la ración si hubiese 2.100 hombres y los víveres tuvieran que durar 4 meses?
3. Tres motores iguales funcionando 6 horas necesitan 9000 litros de agua para refrigerarse. ¿Cuántos litros de agua necesitan 5 motores funcionando 8 horas?
4. En una campaña publicitaria 6 personas reparten 5000 folletos en 5 días. ¿Cuántos días tardarán 2 personas en repartir 3000 folletos?
5. Con 12 kg de pienso, 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 4 conejos en comerse 8 kg de pienso?
6. Tres obreros trabajando 8 horas diarias, tardan en hacer un trabajo 15 días. ¿Cuántos días tardarán en hacer el trabajo 5 obreros trabajando 9 horas diarias?
7. Tres grifos iguales llenen un depósito de 10 m3 en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar un depósito de 8 m3, 2 grifos iguales a los anteriores?
8. Seis obreros enlosan 1200 m2 de suelo en 4 días. ¿Cuántos metros cuadrados de suelo enlosarán 12 obreros en 5 días?
9. Si 6 máquinas excavadoras en 6 horas mueven 1500 m3 de tierra. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra mueven 14 excavadoras en 18 horas?
10. Con 12 kg de pienso, 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán conejos en comerse 8 kg de pienso?
11. Si 3 máquinas en 6 horas revelan 750 fotografías, ¿cuántas fotografías revelan máquinas en 9 horas? ¿Cuántas revelarán 9 máquinas en 7 horas?
12. Para imprimir unos folletos publicitarios, 9 impresoras han funcionado 8 horas diarias durante 40 días. ¿Cuántos días tardarán en imprimir el mismo trabajo 6 impresoras funcionando 10 horas diarias?
13. Para construir 4 casas iguales en 30 días hacen falta 60 albañiles. ¿Cuántos albañiles se necesitarán para construir 6 casas en 90 días?
14. Veinte obreros han colocado durante 6 días 400 metros de cable trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 metros de cable?

3. REPARTOS PROPORCIONALES.

Consiste en repartir una cantidad entre varias partes de forma que lo que reciba cada una de las partes sea proporcional a la cantidad aportada por cada una.
Para hacer un reparto inversamente proporcional entre varias partes, se hace un reparto directamente proporcional entre los inversos de cada una de las partes.

Actividades:

1. *Dos amigas juntan 1.20 y 1.80 euros que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados que vale tres euros. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?*
2. *Por un reportaje fotográfico, tres fotógrafos cobraron 6720 euros. Del reportaje,14 fotos eran de un fotógrafo, 18 del segundo y 24 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?*
3. *Repartir 540 caramelos entre cuatro niños de forma directamente proporciona a las edades de cada uno de ellos que son 3, 4, 5 y 6 años.*

4. *Cinco concursantes participan en una competición en la que tienen que encontrar objetos en el fondo de una piscina. Por orden de actuación consiguen respectivamente 8, 12, 13, 7 y 10 objetos. El premio de la prueba consiste en 150 puntos repartidos de forma proporcional a los objetos que encuentren. ¿Cuántos puntos corresponden a cada participante?*
5. *Los dos camareros de un bar se reparten al final de mes un bote con 136 euros de propina de forma inversamente proporcional al número de días que han faltado. Si uno ha faltado 3 días y otro 5, ¿cuántos euros corresponde a cada uno?*
6. *Según un testamento, una fortuna de 65000 euros, se reparte entre tres personas en partes inversamente proporcionales al sueldo de cada una de ellas. Si los sueldos de estas personas son de 900, 1350 y 1800 euros, ¿cuánto le corresponde a cada una?*
7. *Repartir 114 caramelos entre cuatro niños de forma inversamente proporcional a las edades de ellos que son de 3, 4, 5 y 6 años respectivamente.*
8. *En una competición se van a repartir 174 puntos entre cinco participantes, en orden inversamente proporcional al tiempo que tardan en realizar la prueba. Si los participantes tardan 4, 6, 8, 10 y 12 minutos respectivamente, ¿cuántos puntos le corresponde a cada uno?*
9. *Tres socios pusieron en marcha un negocio aportando, 5000 euros el primero, 25000 euros el segundo y 20000 euros el tercero. El primer año se obtienen 60000 euros de beneficio, ¿cómo deben repartírselos?*
10. *Tres amigos se reparten una pizza de forma inversamente proporcional a sus pesos que son respectivamente 60, 72 y 90 kilogramos. ¿Qué parte de pizza se debe comer cada uno?*
11. *Un profesor entrega una relación de 86 ejercicios a cuatro alumnos para que se los repartan con la condición de que cada uno resuelva una cantidad inversamente proporcional a las calificaciones obtenidas en un examen. Las calificaciones han sido 2, 4, 5 y 8. ¿Cuántos ejercicios debe resolver cada uno?*

6. PORCENTAJES.

Cálculo del tanto por ciento de una cantidad. Para calcular el r % de una cantidad C podemos hacerlo como un ejercicio de magnitudes directamente proporcionales. Si al valor 100 de la primera magnitud le corresponde el valor C de la segunda magnitud, entonces al valor r de la primera magnitud le corresponde el valor r % de la segunda magnitud, que llamaremos "r % de C".

Sin embargo al desarrollar este ejercicio de magnitudes directamente proporcionales es fácil comprobar que para calcular el r % de C es suficiente con multiplicar C por r y dividir por 100.

Tanto por ciento correspondiente a una proporción. También podemos resolver este ejercicio con magnitudes directamente proporcionales. Para calcular el porcentaje que corresponde a una parte P de una cantidad C podríamos hacer: "Si al valor C de la primera magnitud le corresponde el valor 100 de la segunda magnitud, entonces al valor P de la primera magnitud le corresponde un valor de la segunda magnitud que corresponde al porcentaje que buscamos.

También al desarrollar este ejercicio de magnitudes directamente proporcionales es fácil comprobar que para calcular el porcentaje de C que representa una cantidad P, basta con dividir P entre C y multiplicar el resultado por 100.
Aumentos porcentuales. Índice de variación. Para aumentar un porcentaje r a una cantidad C, bastará con calcular el r % de C y sumar esta cantidad al valor C.

Sin embargo en la mayoría de los casos únicamente interesa la cantidad final y no la cantidad que se aumenta. Podemos resolver esta situación viendo la variación que experimenta una unidad.

Calculamos el r % de 1 que es igual a r/100.

Si añadimos esta cantidad a 1 se obtiene que cada unidad se convierte en 1+r/100. A esta cantidad se le conoce como índice de variación.

Como tenemos C unidades, la cantidad final será C·(1+r/100), que se podrá obtener con una sola multiplicación y que podemos resumir con la siguiente fórmula:

Cantidad inicial x Índice de variación = Cantidad final
Disminuciones porcentuales. Índice de variación. Para disminuir un porcentaje r a una cantidad C, bastará con calcular el r % de C y restarle a C el resultado obtenido.

Sin embargo en la mayoría de los casos únicamente interesa la cantidad final y no la cantidad que se disminuye. Podemos resolver esta situación viendo la variación que experimenta una unidad.

Calculamos el r % de 1 que es igual a r/100.

Si restamos esta cantidad de 1 se obtiene que cada unidad se convierte en 1-r/100. A esta cantidad se le conoce como índice de variación.

Como tenemos C unidades, la cantidad final será C·(1-r/100), que se podrá obtener con una sola multiplicación y que podemos resumir con la siguiente fórmula.

Cantidad inicial x Índice de variación = Cantidad final

Actividades:

1. La capacidad del pantano de La Bolera es de 53 Hm3. ¿Cuántos litros de agua tiene cuando está lleno en un 40 %?
2. A un congreso asisten 288 personas, de las que 156 son mujeres. ¿Qué porcentaje de hombres hay en el congreso?
3. El 45 % de los alumnos de un instituto ha aprobado todas las asignaturas al final del curso. Sabiendo que han aprobado 234 alumnos, ¿cuántos estudiantes hay en el instituto?
4. La factura de dos meses de luz de una familia es de 65 euros, a falta de añadir el 16 % de I.V.A. ¿Cuánto supone el I.V.A.? ¿Cuál es el precio final de la factura?
5. Un trabajo realizado en un taller de automóviles vale 80 euros. Por pagarlo al contado me hacen un descuento del 7 %. ¿Cuánto me han descontado? ¿Cuánto tengo que pagar?
6. Un empleado cobraba 1150 euros y le han subido el sueldo 46 euros. ¿Qué % le han subido?
7. Un instituto tiene 360 alumnos, durante el curso 18 alumnos de han dado de baja. ¿Qué % de los alumnos iniciales se ha dado de baja?
8. Una barra de pan valía el 31 de diciembre de 2001, 60 pesetas. El 1 de enero de 2002 la misma barra vale 40 céntimos de euro? ¿Qué % ha subido?
9. Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28,80 euros. ¿Qué % me ha rebajado?
10. Una bicicleta vale 450 euros después de haber aumentado su valor 45 euros. ¿Qué % ha aumentado?
11. Al rebajarme 180 euros en el precio de un coche, he pagado por él 27000 euros. ¿Qué % ha disminuido?
12. Una población costera ha aumentado en verano el número de habitantes en un 150 %. Si en verano tiene 7500 habitantes, ¿cuál es su población normal?

13. Durante un incendio ha ardido el 40 % de los árboles de un bosque. Si después del incendio contamos 4800 árboles, ¿cuántos árboles había al principio?

14. Un juguete vale en una juguetería 40 euros. Durante las fiestas navideñas sube un 18 %, y una vez que éstas han pasado baja un 10 %. Calcular su precio final. ¿Y si primero se produce el descuento del 10 % y después la subida del 18 %?

15. He comprado un ordenador que valía 900 euros, me han hecho un descuento del 16 %, pero después me han cargado el 16 % de I.V.A.? ¿Cuánto me ha costado?

16. Un comerciante ha realizado una compra de botellas de vino. En el transporte se han roto el 20 % de las botellas. ¿Qué porcentaje debe aumentar el precio del vino restante para que en la venta no gane ni pierda dinero?

17. Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30 %, a continuación baja un 15 %, vuelve a bajar un 25 %, y por último tiene una subida del 10 %. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?

18. En distintos supermercados nos hemos encontrado las siguientes ofertas. Decidir razonadamente la que más interesa al consumidor:

a. Pague dos y llévese tres.
b. Pague 3 y llévese cuatro.
c. La segunda a mitad de precio.

19. Actualmente una empresa de seguros de coche ofrece una oferta de pagar 11 meses de seguro y disfrutar de 12. ¿Resulta más rentable que las anteriores?

20. Un empleado ha tenido dos subidas de sueldo en un año por un porcentaje de un 5 % y un 4 % respectivamente. El sueldo final es de 2184. ¿Cuál era el sueldo a principios de año?

a) ¿Qué % hay que aumentar dos veces, de forma consecutiva, a una cantidad para que se duplique?

b) ¿Qué % hay que disminuir dos veces, de forma consecutiva, a una cantidad para que se reduzca a la mitad?

c) ¿Qué % hay que aumentar tres veces, de forma consecutiva, a una cantidad para que se duplique?

d) ¿Qué % hay que disminuir dos veces, de forma consecutiva, a una cantidad para que se reduzca a la mitad?